Índices paramétricos de difusividad para el realce automático de contraste: expresiones corregidas y formulación basada en el equilibrio

(1)Álvaro Anzueto-Ríos, Dr.* (1)Alma Aide Sanchez-Ramírez, M. en T. A.
(1)Rafael Bayareh-Mancilla, Dr.

(1) Instituto Politécnico Nacional
UPIITA
Academia de Biónica, Ciudad de México, México
aanzuetor@ipn.mx

Referencia de este artículo [1].

RESUMEN

Se propone una formulación corregida de los índices paramétricos de difusividad (PIF) de Vlachos y Sergiadis [Fuzzy Sets Syst. 157 (2006) 1126–1138]. Estos índices se basan en el complemento de Sugeno y sirven como criterio de un algoritmo automático de realce de contraste. La propuesta corrige tres expresiones impresas en ese trabajo que no concuerdan con el método y expresa el índice en función de su equilibrio. El factor de normalización impreso se reduce a $\lambda/(MN)$: es negativo para $\lambda < 0$ y se anula en $\lambda = 0$. El factor correcto es $(1+\sqrt{1+\lambda})^2/(MN)$. El momento difuso de primer orden impreso equivale al momento buscado multiplicado por $MN/\max_g h(g)$. Superó la unidad en 99 de las 100 imágenes de prueba de BSDS300; en esos casos el algoritmo usa el equilibrio $(\tilde{m}_1-1)/(2\tilde{m}_1-1)$, cercano a $1/2$, en lugar de $1-m_1$. También una rama de la función S está mal impresa. Expresado en función de su equilibrio, el índice propuesto ya no requiere definiciones por casos ni el parámetro λ. Las expresiones corregidas reproducen todos los valores publicados en las figuras originales. Con las impresas, la adaptación al brillo se invierte o se pierde, y una de las imágenes de prueba queda saturada por completo.

Palabras clave: Realce de imágenes, índice de difusividad, complemento de Sugeno, equilibrio, realce de contraste.

ABSTRACT

This paper proposes a corrected formulation of the parametric indices of fuzziness (PIF) of Vlachos and Sergiadis [Fuzzy Sets Syst. 157 (2006) 1126–1138]. These indices are based on the Sugeno complement and serve as the criterion of an automated contrast-enhancement algorithm. The proposal corrects three printed expressions of that work that are inconsistent with the method, and expresses the index in terms of its equilibrium. The printed normalisation factor reduces to $\lambda/(MN)$; it is negative for $\lambda < 0$ and vanishes at $\lambda = 0$. The correct factor is $(1+\sqrt{1+\lambda})^2/(MN)$. The printed first-order fuzzy moment equals the intended moment multiplied by $MN/\max_g h(g)$. It exceeded unity in 99 of the 100 BSDS300 test images; in those cases the algorithm uses the equilibrium $(\tilde{m}_1-1)/(2\tilde{m}_1-1)$, close to $1/2$, instead of $1-m_1$. One branch of the S-function is also misprinted. Written in terms of its equilibrium, the proposed index needs neither case distinctions nor the parameter λ. The corrected expressions reproduce every value reported in the original figures. With the printed ones, the brightness adaptation is inverted or lost, and one test image becomes fully saturated.

Keywords: Image enhancement, index of fuzziness, Sugeno complement, equilibrium, contrast enhancement.

MSC 2020: 03E72, 68U10, 94A08

Introducción

Vlachos y Sergiadis [1] propusieron un índice paramétrico de difusividad (PIF) para el realce automático de contraste. Como los métodos difusos anteriores [2, 3], su algoritmo interpreta los niveles de gris como grados de pertenencia y los modifica para optimizar una medida de difusividad. Su aportación es el uso de la clase de Sugeno de complementos involutivos [4]: el PIF alcanza el máximo en el equilibrio e del complemento, y no en $1/2$. El valor de e se ajusta a partir del momento difuso de primer orden de la imagen. Después, las pertenencias se transforman con la función S flexible que maximiza el PIF.

Los valores que muestran las figuras de [1] concuerdan con las expresiones correctas (véase la sección Validación Experimental); las inconsistencias que aquí se analizan son, por tanto, erratas tipográficas. Sin embargo, afectan a quien implemente el método a partir de las ecuaciones impresas. Por ello, en este trabajo se propone una formulación corregida del PIF de [1]. En concreto, (i) se demuestran las expresiones corregidas, (ii) se escribe el índice sin singularidades, en función de su equilibrio, (iii) se describe la etapa de optimización de forma reproducible y (iv) se mide el efecto de cada expresión impresa en tres imágenes de prueba. Las ecuaciones de [1] se citan como [1, ec. (n)].

Marco Teórico

En esta sección se resume el método de [1] con la notación que se usa en el resto del trabajo.

Para una imagen de $M \times N$ píxeles con L niveles de gris ($L = 256$ en imágenes de 8 bits) e histograma $h(g)$, las pertenencias son $\mu_g = (g - g_{\text{mín}})/(g_{\text{máx}} - g_{\text{mín}})$ [1, ec. (14)], y se define $p_g = h(g)/(MN)$. Con el complemento de Sugeno $c_\lambda(\mu) = (1-\mu)/(1+\lambda\mu)$, $\lambda > -1$ [1, ec. (8)], el PIF es

$$\gamma_\lambda(A) = K(\lambda) \sum_g h(g)\, \varphi_\lambda(\mu_g), \qquad \varphi_\lambda(\mu) = \mu\, c_\lambda(\mu), \tag{1}$$

[1, ec. (9)]. El algoritmo consta de cuatro etapas: fusifica la imagen, elige λ_{opt} a partir del momento difuso de primer orden [1, ecs. (22)–(24)], busca los parámetros $\mathbf{P} = (a, b, c)$ de la función S flexible [1, ec. (16)] que maximizan el PIF de las pertenencias transformadas [1, ec. (17)] y, por último, defusifica el resultado [1, ec. (27)].

Metodología Propuesta

La propuesta tiene dos partes: primero se corrigen las expresiones impresas en [1] y, después, el índice se reescribe en función de su equilibrio, lo que da lugar a un algoritmo corregido y reproducible.

Factor de normalización

Proposición 1. *Para $\lambda > -1$, φ_λ alcanza su máximo sobre $[0,1]$ en $e_\lambda = 1/(1+\sqrt{1+\lambda})$, y $\varphi_\lambda(e_\lambda) = e_\lambda^2$. Por tanto, el factor que lleva (1) al intervalo $[0,1]$ es*

$$K(\lambda) = \frac{1}{MN\, e_\lambda^2} = \frac{\left(1+\sqrt{1+\lambda}\right)^2}{MN}. \tag{2}$$

Demostración. El numerador de φ'_λ es $1 - 2\mu - \lambda\mu^2$, cuya raíz en $[0,1]$ es e_λ. Esa raíz es también el punto fijo $c_\lambda(e_\lambda) = e_\lambda$, de modo que $\varphi_\lambda(e_\lambda) = e_\lambda^2$. □

El factor impreso [1, ec. (10)] es $\lambda^2\sqrt{1+\lambda}\,/\,[MN(\sqrt{1+\lambda}-1)(1+\lambda+\sqrt{1+\lambda})]$. Como $1+\lambda+\sqrt{1+\lambda} = \sqrt{1+\lambda}\,(1+\sqrt{1+\lambda})$ y $(\sqrt{1+\lambda}-1)(\sqrt{1+\lambda}+1) = \lambda$, se simplifica a $\lambda/(MN)$. Solo coincide con (2) si se cambia el signo de $\sqrt{1+\lambda}$ en su último factor. Tal como está impreso, K es negativo para $\lambda \in (-1, 0)$. En ese intervalo el PIF es menor o igual que cero y su maximización se convierte en una minimización. Además, $K(0) = 0$, mientras que el límite de [1, ec. (11)] exige $4/(MN)$.

El equilibrio y el caso $\lambda = 0$

Al racionalizar [1, ec. (13)] se obtiene

$$e_\lambda = \frac{-1+\sqrt{1+\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\lambda}}, \qquad \lambda > -1, \tag{3}$$

expresión que también es válida en $\lambda = 0$, donde $e = 1/2$. Con (2) y (3), γ_λ es continuo en λ, de modo que las definiciones por casos de [1, ecs. (12)–(13)] resultan innecesarias.

Momento difuso de primer orden

El momento de [1, ecs. (20)–(21)] usa el histograma normalizado por su máximo, $\tilde{h} = h/\max_g h$. Este momento se denota $\tilde{m}_1$, y el momento buscado, $m_1 = \sum_g \mu_g p_g \in (0,1)$. Entonces

$$\tilde{m}_1 = \sum_g \mu_g \, \tilde{h}(g) = \frac{MN}{\max_g h(g)} \, m_1 \;\geq\; m_1, \tag{4}$$

porque $MN \geq \max_g h(g)$. La igualdad exigiría un único nivel de gris, caso degenerado en el que μ_g no está definida; por tanto, $\tilde{m}_1 > m_1$ en toda imagen no constante. Para un histograma uniforme, $\tilde{m}_1 = L/2$. La afirmación "para las imágenes, $m_1 \in (0,1)$" [1, p. 1132] solo es cierta con la normalización p_g.

Proposición 2. *Si $\tilde{m}_1 > 1$, el parámetro $\lambda_{\text{opt}} = (2\tilde{m}_1 - 1)/(1-\tilde{m}_1)^2$ de [1, ec. (24)] sigue cumpliendo $\lambda_{\text{opt}} > -1$. Sin embargo, el equilibrio que realmente se usa es*

$$e_{\lambda_{\text{opt}}} = \frac{\tilde{m}_1 - 1}{2\tilde{m}_1 - 1} \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right), \qquad \lim_{\tilde{m}_1 \to \infty} e_{\lambda_{\text{opt}}} = \tfrac{1}{2}, \tag{5}$$

en lugar del valor $1 - \tilde{m}_1 < 0$ que exige [1, ec. (22)].

Demostración. $1 + \lambda_{\text{opt}} = \tilde{m}_1^2/(1-\tilde{m}_1)^2 > 0$, así que $\sqrt{1+\lambda_{\text{opt}}} = \tilde{m}_1/(\tilde{m}_1 - 1)$ para $\tilde{m}_1 > 1$. Al sustituir en (3) se obtiene (5). □

Por eso la versión impresa del algoritmo no falla de manera visible. Opera con un equilibrio cercano a $1/2$, que corresponde al índice no adaptativo [1, ec. (7)]. Cuando $\tilde{m}_1 < 1$ pero $\tilde{m}_1 \neq m_1$, usa $1 - \tilde{m}_1$ en lugar de $1 - m_1$, lo que puede invertir el sesgo buscado (véase la sección Validación Experimental).

Otras observaciones

(a) La tercera rama de la función S [1, ec. (15)] debe decir $1 - 2\big((x-c)/(c-a)\big)^2$. Tal como está impresa, vale -1 en $x = c$. La función S flexible [1, ec. (16)], que es la que usa el método, es correcta y continuamente diferenciable. (b) El axioma F3 se enuncia con un "si y solo si" [1, p. 1128]. Los axiomas de [5] solo exigen la implicación $A \prec B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$; el recíproco no se cumple para conjuntos que no son comparables mediante $\prec$. (c) El PIF generaliza el índice basado en el producto [1, ec. (7)], al que se reduce cuando $\lambda \to 0$. No generaliza el índice lineal [1, ec. (5)], que usa el mínimo.

Formulación basada en el equilibrio

Al sustituir $\lambda = (1-2e)/e^2$, que es la inversa de (3), en (1) con (2), el índice queda expresado directamente en función de su equilibrio $e \in (0,1)$:

$$\gamma_e(A) = \sum_g p_g \, \psi_e(\mu_g), \qquad \psi_e(y) = \frac{y(1-y)}{e^2 + (1-2e)\, y}. \tag{6}$$

El denominador es lineal en y y positivo en $[0,1]$. Además, $\psi_e(0) = \psi_e(1) = 0$, $\psi_e(e) = 1$ y $\psi_e(y) < 1$ si $y \neq e$. Así, los axiomas F1–F2 se cumplen para todo e, sin definiciones por casos. La regla de ajuste [1, ecs. (22)–(26)] se reduce a

$$e = 1 - m_1, \qquad m_1 = \sum_g \mu_g \, p_g, \tag{7}$$

y el parámetro λ deja de ser necesario.

Tabla 1: Valores publicados en [1] y valores recalculados con las expresiones corregidas (2), (3), (6) y (7).

Origen en [1]	Publicado	Recalculado aquí	Con la expresión impresa
Fig. 1(a), $\lambda = -0{,}9375$	$e = 0{,}8$	$e = 0{,}8000$	$MN\,K = -0{,}9375$ (corregido: $1{,}5625$)
Fig. 2(b), $m_1 = 0{,}9$	$\lambda_{\text{opt}} \approx 80$	$\lambda_{\text{opt}} = 80{,}00$	–
Fig. 6, $\lambda_{\text{opt}} = -0{,}881642$	$e = 0{,}744030$	$e = 0{,}744030$, $m_1 = 0{,}255970$	$K < 0$: PIF ≤ 0
Fig. 8, $\lambda_{\text{opt}} = 25{,}148430$	$e = 0{,}163571$	$e = 0{,}163571$, $m_1 = 0{,}836429$	–
Ec. (11), $\lambda \to 0$	$K \to 4/(MN)$	$MN\,K(0) = 4$	$MN\,K(0) = 0$

Algoritmo corregido y reproducible

1. Calcular μ_g, p_g, m_1 y e con (7).
2. Para $\mathbf{P} = (a, b, c)$ con $0 \leq a < b < c \leq 1$, evaluar $J(\mathbf{P}) = \sum_g p_g\, \psi_e\big(S(\mu_g; \mathbf{P})\big)$, donde S es [1, ec. (16)]. Cada evaluación cuesta $O(L)$ operaciones sobre el histograma y no depende de MN.
3. Maximizar J. La retícula $\{k/255\}$ contiene $\binom{256}{3} = 2\,763\,520$ candidatos. Una búsqueda exhaustiva en ella tardó de 4 a 7 s en Python vectorizado, así que su óptimo puede servir de referencia. Si se prefiere el recocido simulado [6], como en [1], debe especificarse su protocolo. Aquí se usó el recocido generalizado de SciPy [7] con 3000 evaluaciones y 20 semillas, y se garantizó $a \leq b \leq c$ ordenando la terna (a, b, c). El recocido alcanzó el óptimo de J en la retícula, con tolerancia 10^{-4}, en 20/20, 20/20 y 18/20 corridas en cada imagen de prueba, respectivamente.
4. Defusificar: $g' = \operatorname{round}\big((L-1)\, S(\mu_g; \mathbf{P}_{\text{opt}})\big)$.

Validación Experimental

La propuesta se valida en tres niveles. Primero, se comprueba que las expresiones corregidas reproducen los valores publicados en [1]. Después, se cuantifica el efecto del momento impreso sobre el equilibrio en las 100 imágenes de prueba de la base BSDS300 [8]. Por último, se mide el efecto de cada expresión impresa sobre el algoritmo completo en tres imágenes de esa base, elegidas para cubrir imágenes predominantemente oscuras, predominantemente claras y de bajo contraste. Las imágenes se convierten a escala de grises de 8 bits, y en todos los casos el óptimo de la función S se obtiene por búsqueda exhaustiva en la retícula descrita en el algoritmo corregido, de modo que los resultados no dependen del optimizador. Los cálculos se realizaron en Python con SciPy [7].

Reproducción de los resultados originales

La Tabla 1 y la Figura 1(a,b) muestran que las expresiones corregidas reproducen todos los valores publicados en [1], incluidos los equilibrios de sus Figs. 6 y 8 y la curva de su Fig. 1(a). El factor impreso no puede generar esa curva: para $\lambda = -0{,}9375$ es negativo.

El momento en imágenes naturales

En las 100 imágenes de prueba de BSDS300 [8], $\tilde{m}_1$ varió entre 0.727 y 66.2 (mediana 22.3) y superó 1 en 99 imágenes. La Figura 1(c) muestra la consecuencia que anticipa la Proposición 2: en esas 99 imágenes, el equilibrio que usa la versión impresa del algoritmo deja de seguir el brillo de la imagen y se concentra cerca de $1/2$. Vale 0.489 para la mediana de $\tilde{m}_1$ y queda a menos de 0.05 de $1/2$ en 88 de las 100 imágenes. En cambio, los dos equilibrios publicados en [1] coinciden con los correctos (Tabla 1), lo que indica que los autores de [1] usaron la normalización p_g.

Efecto de cada expresión impresa

Tres imágenes del conjunto de prueba de BSDS300 cubren los tres regímenes de e; en adelante se identifican por su contenido. La imagen *buzo* (núm. 45096 en BSDS300) tiene el menor m_1 del conjunto (imagen predominantemente oscura). La imagen *avión* (núm. 3096) tiene la menor dispersión de pertenencias entre las seis imágenes con $m_1 > 0{,}6$ (imagen predominantemente clara). La imagen

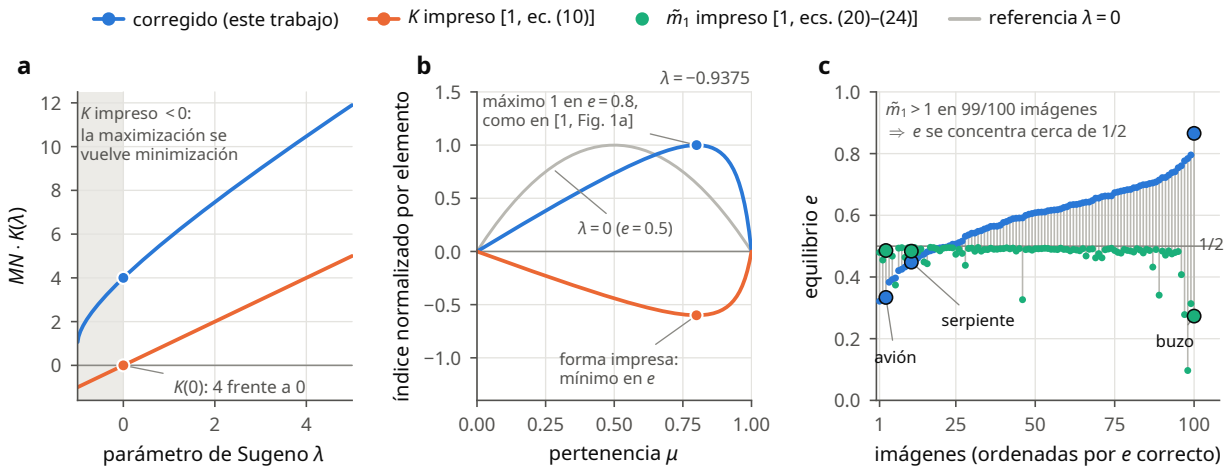


Figura 1: (a) Factor de normalización impreso en [1, ec. (10)] y corregido (2). (b) Índice normalizado por elemento para $\lambda = -0{,}9375$. El factor corregido reproduce [1, Fig. 1(a)], con máximo 1 en $e = 0{,}8$; el impreso produce una curva no positiva. (c) Equilibrio que usa la versión impresa del algoritmo y equilibrio correcto en las 100 imágenes de prueba de BSDS300, ordenadas por el valor correcto. Los segmentos verticales muestran el error.

Tabla 2: Efecto de cada expresión impresa sobre el algoritmo completo de [1] (búsqueda exhaustiva en la retícula de paso $1/255$). $\tilde{m}_1$: momento con el histograma normalizado por su máximo; e: equilibrio que realmente se usa; saturación: píxeles enviados a 0 o 255 que no estaban en un nivel extremo de la entrada.

Imagen	Configuración	e	$\mathbf{P}_{\text{opt}} = (a, b, c)$	Media $\bar{y}$	σ_y	Saturación (%)
buzo	solo K impreso	0.866	(0.000, 0.004, 0.008)	1.000	0.006	99.99
$m_1 = 0{,}134$	solo $\tilde{m}_1$ impreso (= versión impresa)	0.273	(0.000, 0.004, 0.647)	0.310	0.242	3.64
$\tilde{m}_1 = 0{,}727$	corregido	0.866	(0.000, 0.004, 0.208)	0.636	0.286	15.03
avión	solo K impreso	0.334	(0.220, 0.996, 1.000)	0.363	0.147	4.19
$m_1 = 0{,}666$	solo $\tilde{m}_1$ impreso (= versión impresa)	0.486	(0.000, 0.996, 1.000)	0.466	0.149	0.34
$\tilde{m}_1 = 18{,}138$	corregido	0.334	(0.220, 0.996, 1.000)	0.363	0.147	4.19
serpiente	solo K impreso	0.448	(0.000, 0.725, 1.000)	0.428	0.108	0.02
$m_1 = 0{,}552$	solo $\tilde{m}_1$ impreso (= versión impresa)	0.484	(0.000, 0.675, 1.000)	0.460	0.115	0.02
$\tilde{m}_1 = 15{,}805$	corregido	0.448	(0.000, 0.725, 1.000)	0.428	0.108	0.02

serpiente (núm. 196073) tiene el histograma de pertenencias más estrecho del conjunto (imagen de bajo contraste). La Tabla 2 y la Figura 2 comparan el algoritmo corregido con versiones que conservan una o ambas expresiones impresas. En la imagen *buzo*, $e = 0{,}866$ y $\lambda < 0$. Basta el factor impreso para que la maximización se convierta en minimización y el 99.99 % de los píxeles pase a blanco. El momento impreso, $\tilde{m}_1 = 0{,}727$, da $e = 0{,}273$: un equilibrio menor que $1/2$ para una imagen oscura. El brillo medio de salida es entonces 0.310 en lugar de 0.636. Como ese e corresponde a $\lambda > 0$, el factor impreso solo reescala la función objetivo, y la versión impresa completa coincide con la fila "solo $\tilde{m}_1$ impreso". En las imágenes *avión* y *serpiente*, $\tilde{m}_1 = 18{,}1$ y 15.8. El equilibrio se desplaza a 0.486 y 0.484, cerca de $1/2$, en lugar de 0.334 y 0.448, y se pierde la adaptación de [1].

Discusión

Las correcciones propuestas no modifican el método de [1]: reproducen sus resultados publicados (Tabla 1) y solo restituyen la forma correcta de tres expresiones. Su importancia es práctica. Una implementación que siga las ecuaciones impresas no produce errores visibles. Con el factor impreso, la maximización se convierte en minimización cuando $\lambda < 0$; con el momento impreso, el equilibrio se concentra cerca de $1/2$ y el algoritmo pierde la adaptación al brillo, o la invierte cuando $\tilde{m}_1 < 1$. Por

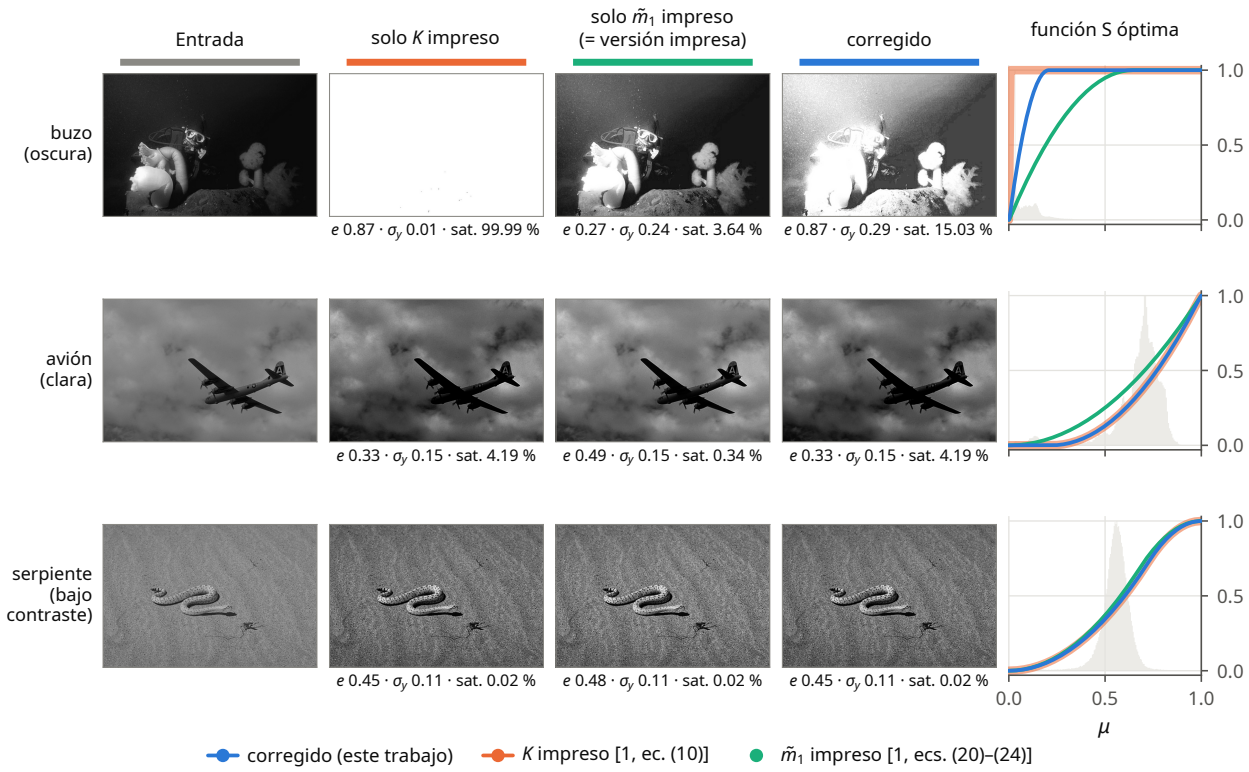


Figura 2: Efecto de cada expresión impresa en tres imágenes de BSDS300 (e: equilibrio usado; σ_y: contraste RMS; sat.: píxeles saturados). En las imágenes *avión* y *serpiente* ($\lambda > 0$), el factor impreso solo reescala la función objetivo, por lo que su salida coincide con la corregida. Derecha: funciones S flexibles óptimas sobre el histograma de entrada (gris).

ello, quien implemente el método debe usar las expresiones (2), (3), (6) y (7). La formulación basada en el equilibrio, además, simplifica la implementación: elimina el parámetro λ, las definiciones por casos y la singularidad en $\lambda = 0$, y permite fijar directamente el valor e en el que el índice es máximo.

Queda una cuestión abierta. En las doce corridas de la Tabla 2, los parámetros óptimos quedan sobre una arista del dominio admisible $0 \le a < b < c \le 1$: se cumplen al menos dos de las condiciones de frontera $a = 0$, $b = a$, $b = c$ y $c = 1$. Lo mismo ocurre con los dos óptimos publicados en [1, Figs. 6 y 8], $(0, \frac{1}{255}, \frac{160}{255})$ y $(\frac{151}{255}, \frac{254}{255}, 1)$. Además, el método corregido todavía satura el 15.0 % de los píxeles de la imagen *buzo*. Estas observaciones atañen al propio criterio de optimización, no a su forma impresa, y quedan como trabajo futuro.

Conclusión

En este trabajo se propuso una formulación corregida de los índices paramétricos de difusividad de [1]. Tres expresiones impresas en ese trabajo no concuerdan con el método ni con sus propios resultados: el factor de normalización, el momento difuso de primer orden y una rama de la función S. Sus formas corregidas son (2), (3), (6) y (7), junto con la rama de la función S dada en la subsección Otras observaciones. Expresado en función de su equilibrio, el índice (6) no requiere definiciones por casos ni el parámetro λ, y la regla de ajuste se reduce a $e = 1 - m_1$. Una implementación que siga las ecuaciones impresas no falla de manera visible. En cambio, invierte o anula la adaptación al brillo y, para $\lambda < 0$, minimiza el índice.

Referencias

[1] I. K. Vlachos and G. D. Sergiadis, "Parametric indices of fuzziness for automated image enhancement," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, no. 8, pp. 1126–1138, 2006, doi: 10.1016/j.fss.2005.11.016.

[2] S. K. Pal and R. A. King, "Image enhancement using smoothing with fuzzy sets," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. SMC-11, no. 7, pp. 494–501, 1981, doi: 10.1109/TSMC.1981.4308726.

[3] H. R. Tizhoosh, G. Krell, and B. Michaelis, "λ-enhancement: Contrast adaptation based on optimization of image fuzziness," in *Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE'98)*, vol. 2, 1998, pp. 1548–1553, doi: 10.1109/FUZZY.1998.686349.

[4] M. Higashi and G. J. Klir, "On measures of fuzziness and fuzzy complements," *International Journal of General Systems*, vol. 8, no. 3, pp. 169–180, 1982, doi: 10.1080/03081078208547446.

[5] A. De Luca and S. Termini, "A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory," *Information and Control*, vol. 20, no. 4, pp. 301–312, 1972, doi: 10.1016/S0019-9958(72)90199-4.

[6] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi, "Optimization by simulated annealing," *Science*, vol. 220, no. 4598, pp. 671–680, 1983, doi: 10.1126/science.220.4598.671.

[7] P. Virtanen *et al.*, "SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python," *Nature Methods*, vol. 17, no. 3, pp. 261–272, 2020, doi: 10.1038/s41592-019-0686-2.

[8] D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal, and J. Malik, "A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics," in *Proc. 8th IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV 2001)*, vol. 2, 2001, pp. 416–423, doi: 10.1109/ICCV.2001.937655.

Referencias

[1] Anzueto-Ríos, A., Sanchez-Ramírez, A. A., Bayareh-Mancilla, R. *Índices paramétricos de difusividad para el realce automático de contraste: expresiones corregidas y formulación basada en el equilibrio Boletín UPIITA. año _____, (_____) _____.*