

CARACTERIZACIÓN DE LOS PARÁMETROS MECÁNICOS DE UN MOTOR DE CD

Ángel Adrián Orta Quintana¹, Ramón Silva Ortigoza¹, Rogelio Ernesto García Chávez¹, Magdalena Marciano Melchor¹, Erik Reyes Reyes¹, Ivonne Montiel Lorenzana²

¹Laboratorio de Mecatrónica y Energías Renovables, CIDETEC

²UPIITA

Instituto Politécnico Nacional

aortaq1300@alumno.ipn.mx

Boletín No. 101, 1o. de marzo de 2024

Resumen

En este trabajo, se presenta el proceso de obtención de la constante de torque del motor, la constante de fuerza contraelectromotriz y el coeficiente de fricción viscosa de los motores de CD a partir de sus ecuaciones dinámicas. Además, se realizan simulaciones de un motor de CD para comprobar las ecuaciones obtenidas en este escrito.

1. Introducción

Los motores de CD son máquinas que convierten la energía eléctrica en energía mecánica mediante el uso de campos magnéticos. Los motores de CD se caracterizan por contar con un rotor (parte giratoria) y un estator (parte fija), dichos motores pueden ser de dos tipos; de imanes permanentes o electroimanes. Este escrito se estructura de la siguiente forma: se obtienen las ecuaciones dinámicas del motor de CD en la sección II. Se explica a detalle la obtención de las constantes de fuerza contraelectromotriz y de torque del motor de CD en la sección III, se muestran los resultados de simulación en la sección IV y finalmente se presentan las conclusiones en la sección V.

2. Modelo matemático de un motor de CD

En la siguiente figura se muestra el diagrama electromecánico de un motor de CD.

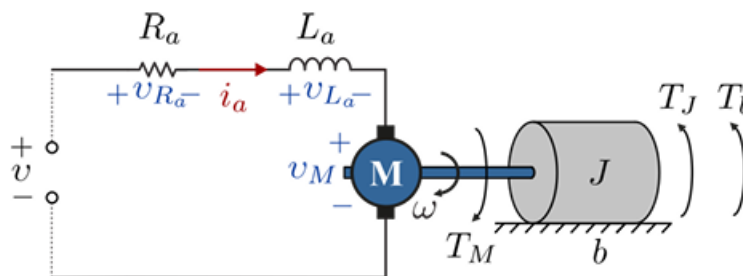


Figura 1 Esquema electromecánico del motor de CD.

A partir de la Figura 1, T_M representa el par en la flecha del motor, T_J es el par ocasionado por el momento de inercia J , y T_b es el par provocado por el coeficiente de fricción viscosa b y ω es la velocidad angular en la flecha del motor. Del mismo modo, el motor tiene una corriente de armadura i_a que fluye por la resistencia R_a y la inductancia de armadura L_a . Otros valores importantes son b , n , k_m y k_e que corresponden al coeficiente de fricción viscosa, la relación de engranes del motor, la constante de torque y la constante de fuerza contraelectromotriz, respectivamente. Aplicando la segunda ley de Newton, se obtiene la siguiente suma de pares:

$$T_M - T_J - T_b = 0, \quad (1)$$

donde para la ecuación (1) los pares T_M , T_J , y T_b están determinados por las siguientes relaciones físicas:

$$\begin{aligned} T_M &= k_m n i_a \\ T_J &= J \frac{d\omega}{dt} \\ T_b &= b\omega, \end{aligned} \quad (2)$$

por lo tanto, sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (1) y resolviendo se tiene:

$$J \frac{d\omega}{dt} = k_m n i_a - b\omega \quad (3)$$

Por otra parte, aplicando la ley de tensiones de Kirchoff sobre la malla del circuito de la Figura 1, se obtiene la siguiente ecuación:

$$L_a \frac{di_a}{dt} = v - R_a i_a - v_M, \quad (4)$$

el voltaje v_M se obtiene a partir de la siguiente proporción:

$$v_M = k_e n \omega, \quad (5)$$

de esta manera, al sustituir la ecuación (5) en la ecuación (4) se tiene:

$$L_a \frac{di_a}{dt} = v - R_a i_a - k_e n \omega. \quad (6)$$

De este modo, se han obtenido todas las aportaciones dinámicas en un motor de CD, por lo cual, el modelo matemático queda representado por las ecuaciones (3) y (6).

3. Cálculo de k_m , k_e y b

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones (3) y (6) se tiene:

$$L_a s I_a(s) = V(s) - R_a I_a(s) - k_e n \omega(s), \quad (7)$$

$$J s \omega(s) = k_m n I_a(s) - b \omega(s) \quad (8)$$

Resolviendo la ecuación (8) para $\omega(s)$ y sustituyendo en la ecuación (7), la función de transferencia que relaciona la corriente de armadura $I_a(s)$ con el voltaje de entrada $V(s)$ es:

$$\frac{I_a(s)}{V(s)} = \frac{s \frac{1}{L_a} + \frac{b}{J L_a}}{s^2 + s \left(\frac{L_a b + R_a J}{J L_a} \right) + \frac{R_a b + k_e k_m n}{J L_a}} \quad (9)$$

Por otro lado, ahora resolviendo la ecuación (8) para $I_a(s)$ y sustituyendo en la ecuación (7), la función de transferencia que relaciona la velocidad angular $\omega(s)$ con el voltaje de entrada $V(s)$ es:

$$\frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{\frac{k_m}{J L_a}}{s^2 + s \left(\frac{L_a b + R_a J}{J L_a} \right) + \frac{R_a b + k_e k_m n}{J L_a}} \quad (10)$$

Considerando un voltaje de alimentación de magnitud constante $v(t) = \bar{v}$, cuya transformada de Laplace es $V(s) = \frac{\bar{v}}{s}$ y aplicando el teorema del valor final para la ecuación (9), el valor en estado estacionario de la corriente de armadura \bar{i}_a es:

$$\bar{i}_a = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\bar{v}}{s} \frac{s \frac{1}{L_a} + \frac{b}{JL_a}}{s^2 + s \left(\frac{L_a b + R_a J}{JL_a} \right) + \frac{R_a b + k_e k_m n}{JL_a}} = \frac{b}{R_a b + k_e k_m n} \bar{v} \quad (11)$$

Por otra parte, aplicando el teorema del valor final para la ecuación (10), el valor en estado estacionario de la velocidad angular $\bar{\omega}$ es:

$$\bar{\omega} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\bar{v}}{s} \frac{\frac{k_m}{JL_a}}{s^2 + s \left(\frac{L_a b + R_a J}{JL_a} \right) + \frac{R_a b + k_e k_m n}{JL_a}} = \frac{k_m}{R_a b + k_e k_m n} \bar{v} \quad (12)$$

Para los motores de CD se sabe que la constante de fuerza contraelectromotriz k_m y k_e tienen el mismo valor, esto es:

$$k_m = k_e \quad (13)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (11) y (12) dan como resultado lo siguiente:

$$\bar{i}_a = \frac{b}{R_a b + k_m^2 n} \bar{v}, \quad (14)$$

$$\bar{\omega} = \frac{k_m}{R_a b + k_m^2 n} \bar{v}. \quad (15)$$

A partir de las ecuaciones (14) y (15), y resolviendo simultáneamente para k_m y b se tienen los siguientes resultados:

$$k_m = k_e = \frac{\bar{v} - R_a \bar{i}_a}{\bar{\omega} n} \quad (16)$$

$$b = - \frac{\frac{(\bar{v} - R_a \bar{i}_a)^2}{\bar{\omega}^2} - \frac{\bar{v}(\bar{v} - R_a \bar{i}_a)}{\bar{\omega}^2}}{R_a} \quad (17)$$

Por lo tanto, a partir de las ecuaciones (16) y (17) se puede calcular el valor de k_m y b a partir de los valores en régimen permanente de \bar{v} , \bar{i}_a , $\bar{\omega}$ y conociendo la resistencia de armadura R_a del motor de CD.

4. Simulación

A continuación, se presentan los resultados de simulación para un motor modelo ENGEL GNM5440E-G3.1 con una relación de caja de engranes de 14.5:1, el cual cuenta con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} L_a &= 2.22 \text{ mH} \\ R_a &= 0.965 \Omega \\ J &= 118.2 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2 \\ k_m &= 120.1 \times 10^{-3} \frac{\text{Nm}}{\text{A}} \\ k_e &= 120.1 \times 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{rad}} \\ b &= 129.6 \times 10^{-3} \frac{\text{Nms}}{\text{rad}} \end{aligned} \quad (18)$$

Por lo tanto, se espera que al realizar la simulación se obtenga el mismo valor para la constante de fuerza contraelectromotriz k_e , para la constante de torque del motor k_m y para el coeficiente de fricción viscosa b definido en (18). Para la siguiente simulación se propone un voltaje de entrada de $v(t) = 12V$. Los resultados de esta simulación se muestran en la Figura 2.

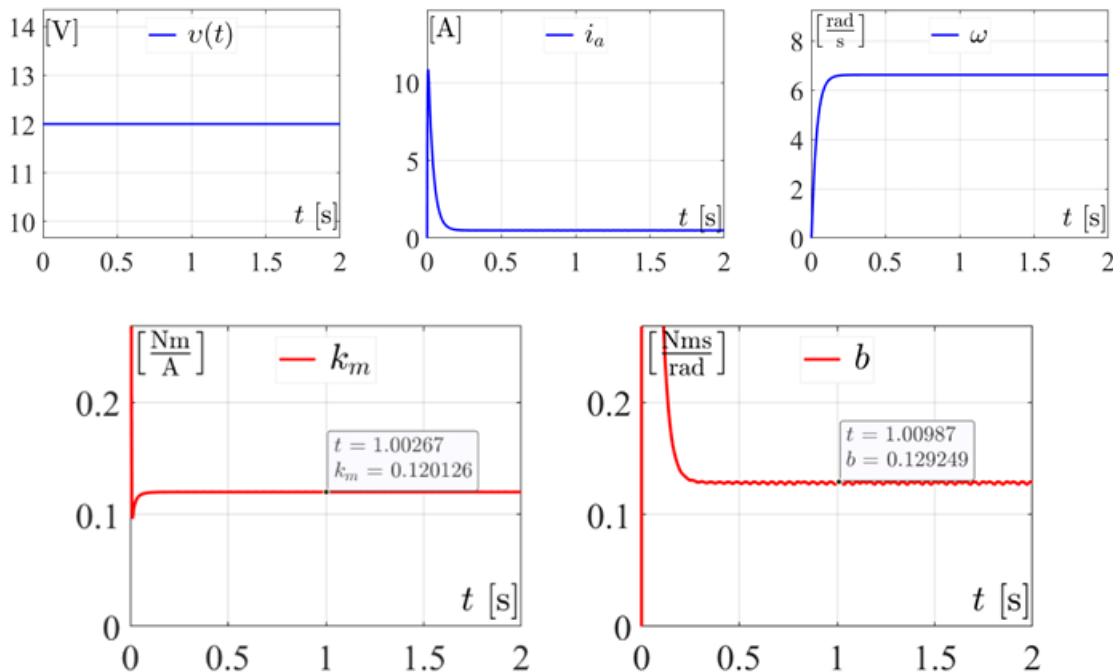


Figura 2 Simulación para $v(t) = 12V$.

Como se puede observar en la Figura 2, al graficar los valores de k_m y b , estos equivalen a los especificados en la ecuación (18) en régimen permanente.

5. Conclusiones

En este trabajo se encontraron las ecuaciones para hallar el valor de la constante de fuerza contraelectromotriz, la constante de torque y el coeficiente de fricción viscosa en un motor de CD y, a través de simulaciones en Matlab-Simulink utilizando la librería de Simscape se comprobó la validez de estas ecuaciones.

Referencias

[1] Hernández, V., Silva, R., Carrillo, R. (2013). *Control Automático*. Ciudad de México: Colección CIDETEC.

Orta Quintana, A., Silva Ortigoza, R., García Chávez, R., Marciano Melchor, M., Reyes Reyes, E., Montiel Lorenzana, I. (2026). CARACTERIZACIÓN DE LOS PARÁMETROS MECÁNICOS DE UN MOTOR DE CD. *Boletín UPIITA*. año XX, (NÚM) 2026.